

LAHENDUSED 11.KLASS

1. Vastus: suureneb 27 korda

Lahendus:

Sirge võrrand: $y = kx + b$, kus k on sirge tõus ja b on algordinaat.

Kuna kolmnurk asub II veerandis, siis nii k , kui ka b väärtused on positiivsed.

Kolmnurga pindala: $S = \frac{AO \cdot OB}{2}$.

Kuna punkt B asub y -teljel, siis $B(0; b)$

Ning $OB = b$

$k = \tan \alpha = \frac{OB}{OA}$, kust $OA = \frac{OB}{\tan \alpha} = \frac{b}{k}$

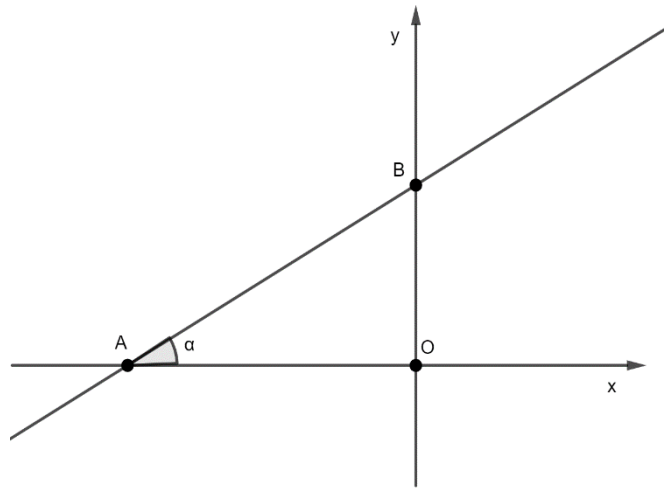
Kolmnurga pindala $S = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{\frac{b}{k} \cdot b}{2} = \frac{b^2}{2k}$.

Kui algordinaat suureneb kolm korda ning sirge tõus väheneb kolm korda, siis sirge võrrand on $y = \frac{k}{3}x + 3b$. Sel juhul $B(0; 3b)$ ning $OB = 3b$.

$\frac{k}{3} = \frac{OB}{OA}$, kust $OA = \frac{3 \cdot OB}{k} = \frac{9b}{k}$

ning kolmnurga pindala $S = \frac{AO \cdot OB}{2} = \frac{\frac{9b}{k} \cdot 3b}{2} = \frac{27b^2}{2k}$

$\frac{27b^2}{2k} : \frac{b^2}{2k} = 27$, ehk pindala suureneb 27 korda.



Hindamine:

Märkus, et kolmnurga ühe kaateti pikkus on võrdne algordinaadiga 1p

Avaldatud teine kaatet ja kolmnurga pindala 2p

Avaldatud kolmnurga pindala pärast algordinaati ja sirge tõusu muutmist 3p

Leitud õige vastus 1p

7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

Kui vastus leitud mingite konkreetsete arvudega, siis anda maksimaalselt 4p

2. Vastus: $\begin{cases} x = 2022 \\ y = 2 \end{cases}$ või $\begin{cases} x = 2020 \\ y = 0 \end{cases}$

Lahendus:

$$xy + 2020 - x - 2021y = 0$$

$$xy - x - 2021y + 2021 - 1 = 0$$

$$x(y - 1) - 2021(y - 1) = 1$$

$$(x - 2021)(y - 1) = 1$$

Kuna x ja y on täisarvud, siis ka $(x - 2021)$ ja $(y - 1)$ on täisarvud.

Ühe saamiseks on olemas kaks võimalust: $1 \cdot 1 = 1$ või $-1 \cdot (-1) = 1$, ehk

$$\begin{cases} x - 2021 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} x - 2021 = -1 \\ y - 1 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2022 \\ y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2020 \\ y = 0 \end{cases}$$

Hindamine:

Võrrand on esitatud kujul: $(x - 2021)(y - 1) = 1$ 3p

Märkus, et $(x - 2021)$ ja $(y - 1)$ on täisarvud 1p

Leitud, et kahe täisarvu korrutamisel 1 saamiseks on kaks võimalust 1p

Leitud mõlemad lahendid 2p

7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

3. Vastus: $\frac{5(18-4\sqrt{3})}{92}$ (cm).

Lahendus:

Kui võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt on $P = 15$ cm, siis selle küljepikkus on $a = 5$ cm. Olgu väikseima ruudu küljepikkus x (cm). Siis keskmise ruudu küljepikkus on $2x$ (cm) ning suurima ruudu küljepikkus on $3x$ (cm). Kui vaadelda kolmnurga alust, siis sellele toetuvad kõik kolm ruutu ning lisaks veel kaks täisnurkset kolmnurka. Olgu nende kolmnurkade lühemad kaatetid vastavalt y_1 ja y_2 . Kuna kummagi kolmnurga üks nurkadest on 60° (võrdkülgse kolmnurgaga ühine nurk), siis vastavalt tangensi definitsioonile saame, et

$$y_1 = \frac{x}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{3}}{3} \qquad y_2 = \frac{3x}{\tan 60^\circ} = \frac{3x}{\sqrt{3}} = x\sqrt{3}$$

Seega saame kokku panna võrrandi

$$y_1 + x + 2x + 3x + y_2 = a$$

ehk

$$\frac{x\sqrt{3}}{3} + x + 2x + 3x + x\sqrt{3} = 5$$

Võrrandi lahendamisel saame, et väikseima ruudu küljepikkus on

$$x = \frac{15}{18 + 4\sqrt{3}} = \frac{5(18 - 4\sqrt{3})}{92} \text{ (cm).}$$

Hindamine:

Kolmnurga küljepikkuse leidmine	1p
Täisnurksete kolmnurkade kaatetite pikkuste leidmine	3p
Võrrandi koostamine väikseima ruudu küljepikkuse suhtes	1p
Võrrandi lahendamine	1p
Õige lõppvastus	<u>1p</u>
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

4. Vastus: a)ei, b)jah

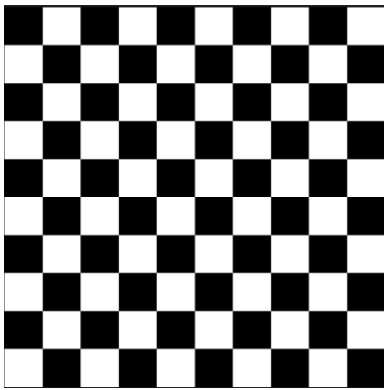
Lahendus:

a) Värvime kogu ruudustiku valgeteks ja mustadeks nii et kaks kõrval olevat ruutu oleksid erinevat värvi. Näime, et 50 ruutu on musta ja 50 valget.

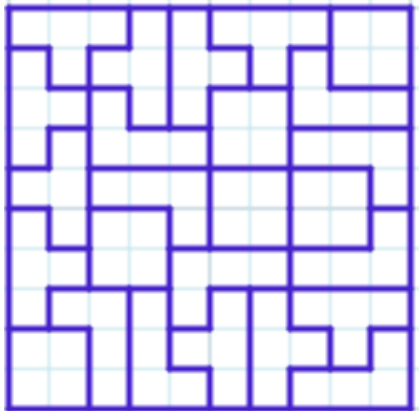
T kujund hõlmab endas kas 1 valget ja 3 musta või 3 musta ja 1 valget.

L ja O kujundit hõlmavad mõlemad 2 valget ja 2 musta.

Kuna T kujundite arv on paaritu, siis need peaksid hõlmama paaritu arvu valgeid ja musta ruutu, mis aga on vastuolus.



b) Jah, on võimalik. Näide:



Hindamine:

a)

õige värvimine

1p

märkus, et T kujund hõlmab paaritu arvu musti ja valgeid ruute

2p

seletuste lõppuni viimine

1p

b)

korrektne näide

3p

7p

Märkus: ainult õige vastuse eest 0p

5. Vastus:

Lahendus:

Alguseks märkame, et kui Peeter alati kirjutab arvu, mille numbrite summa on 1 (1, 10, 100, 1000), siis tema ei saa kaotada, kuna tema käikude arv on sama või ühe võrra väiksem võrreldes Veikoga. Kui Veiko kirjutab arvu, mille numbrite summa on suurem kui 1 siis Peeter on kohe võitmas. Seepärast aga Veiko peab ka kasutama ainult neid 4 arvu, et mitte koheselt kaotus seisu jääda.

Tõestame, et kui Peeter vastab arvudele 10 ja 1000 arvuga 1 ja arvudele 1 ja 100 arvuga 10, siis ta ka võidab. Tõesti, kui Peeter teeb selliseid käike, siis kogu tahvli peal olevate arvude numbrite summa jagub 11, ning kuna 2020 jagudes 11-ga annab jäägi 7 siis lõpus jääb teha 7 käiku, ehk Peeter ka võidab, kuna teeb ühe käigu vähem. Nüüd näitame, et selline käik on alati võimalik. Vähim arv mis on suurem kui 2020 ja jagub 11 on 2024. See tähendab, et esimest käiku saab alati teha (vastata ühega kui Veiko kirjutab 10 või 1000 ning vastata kümnega, kui Veiko kirjutab 1 või 100). Edasi vastata 10 ei saa ainult juhul, kui peale Veiko käiku arvude summa on 2014, millele tuleks vastata ühega ning jääb alles 5, mis on paaritu, ning Peeter ikka võidab. Kuna 10 on väiksem kui 11, siis rohkem arve meil ei ole vaja vaadata.

Hindamine:

Märkus, et kui Peeter alati kirjutab arvu, mille numbrite summa on 1 siis ta ei kaota:	1p
Järeldus, et Veiko peab sammuti kasutama ainult arve, mille numbrite summa on 1:	1p
Õige võidu strateegia kirjeldamine:	3p
Näidatud, et selline võidu strateegia on alati võimalik:	2p
	7p

Märkus: ainult õige vastuse eest 0p